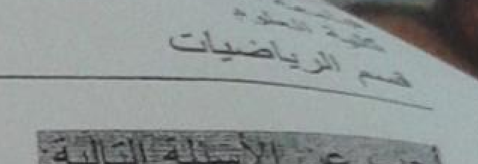
أسئلة مقرر نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية	الاسم:
لطلاب السنة الرابعة –رياضيات	الدرجة:
لدورة امتحانات الفصل الدراسي الثاني[2012-2013]	المدة :



أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (**20درجة**) لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية من الشكل :

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad ....(1)$$

حيث w الدالة المجهولة و z المتحول المستقل.

المطلوب: عرف النقطة العادية والنقطة الشاذة والنقطة الشاذة النظامية للمعادلة (1) ، ثم بين من أجل المعادلة:

$$\boxed{w'' + \frac{z+2}{z-1}w' + \frac{z}{(z+1)^2}w = 0}$$

النقاط الشاذة والعادية لها !

السؤال الثاني:(**25درجة**) عين حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى (بطريقة النشر في متسلسلة قوى):

* ...... $\boxed{W' = Z^2 + W^2}$ الموافق للشرط الإبتدائي:

$[Z = 0$ عندما $W = 1]$

(نكتفي بحساب الثوابت الاختيارية حتى a_3) .

السؤال الثالث:(**35 درجة**) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

$$2z^2w'' + zw' + (z^2 - 3)w = 0 \quad ....(1)$$

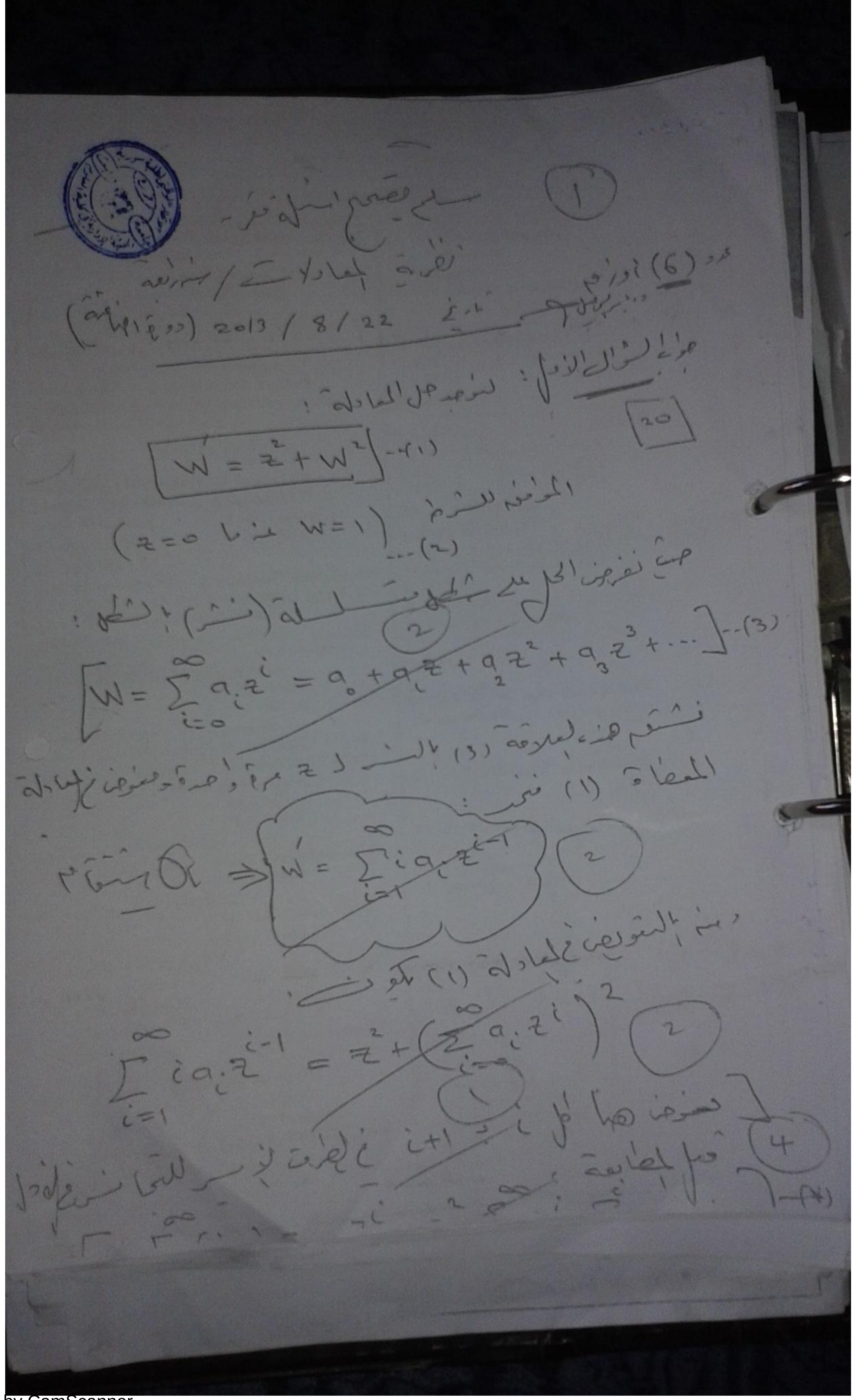
أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة في جوار النقطة (z=0) بعد إثبات أنها شاذة نظامية للمعادلة !

السؤال الرابع (**20درجة**) : لتكن لدينا المسألة الحدية :

$$y'' - y = f(x) \quad ......(1)$$

وحيث $y(x)$ محدود من أجل $x \in (-\infty, +\infty)$

المطلوب : استخرج دالة غرين لهذه المسألة الحدية ثم اكتب صيغة الحل للمسألة بدلالته !



(1)

سلم تصحيح أسئلة فرع

نظرية المعادلات / [illegible]

عدد (6) أوراق

تاريخ 2013 / 8 / 22 (الدورة الثانية)

جواب السؤال الأول: لنوجد حل المعادلة: [20]

$$w' = z^2 + w^2 \quad \dots(1)$$

الموافق للشرط

$(w = 1$ عندما $z = 0)$ ...(2)

حيث نفرض الحل على شكل متسلسلة (قوى) بالشكل: (2)

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \dots(3)$$

نشتق هذه العلاقة (3) بالنسبة لـ z مرة واحدة ونعوض في المعادلة المعطاة (1) فنجد:

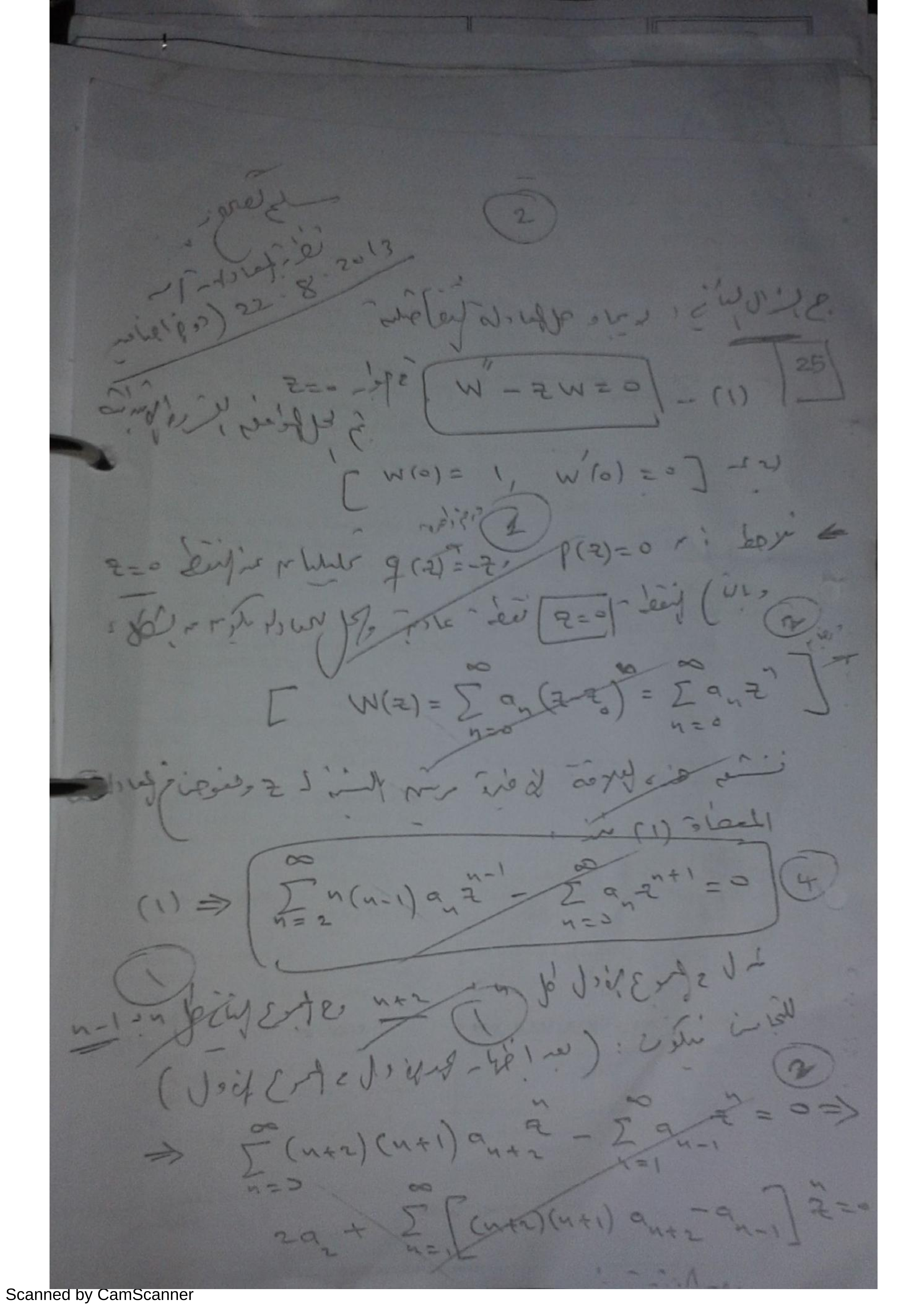
مشتقة a_i $\Rightarrow$ $w' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$ (2)

ومنه بالتعويض في المعادلة (1) يكون:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\right)^2$$ (2) (1)

نعوض هنا كل i بـ $i+1$ في الطرف الأيسر للتساوي نستنتج [illegible] (4)

من المطابقة نجد: ...(*)



مسلم الصحوف
تم تفريغ محاضرات الاستاذ
22 - 8 - 2013 (دون امتحانات)

(2)

ع بالمثال الثاني : نوجد حل المعادلة التفاضلية

25

$$W'' - zW = 0 \quad \text{--- (1)}$$

عند $z=0$ ثم جد الحل الخاص بالشروط الابتدائية

حيث $[\, w(0) = 1 ,\ w'(0) = 0 \,]$

نلاحظ : أن $p(z)=0$, $q(z)=-z$ تحليليتان عند النقطة $z=0$

بالتالي النقطة $z=0$ نقطة عادية ويكون حل المعادلة مكتوب بالشكل :

$$\left[\ W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \right]$$

نشتق هذه المتسلسلة مرتين بالنسبة لـ z ونعوض في المعادلة المعطاة (1) نجد

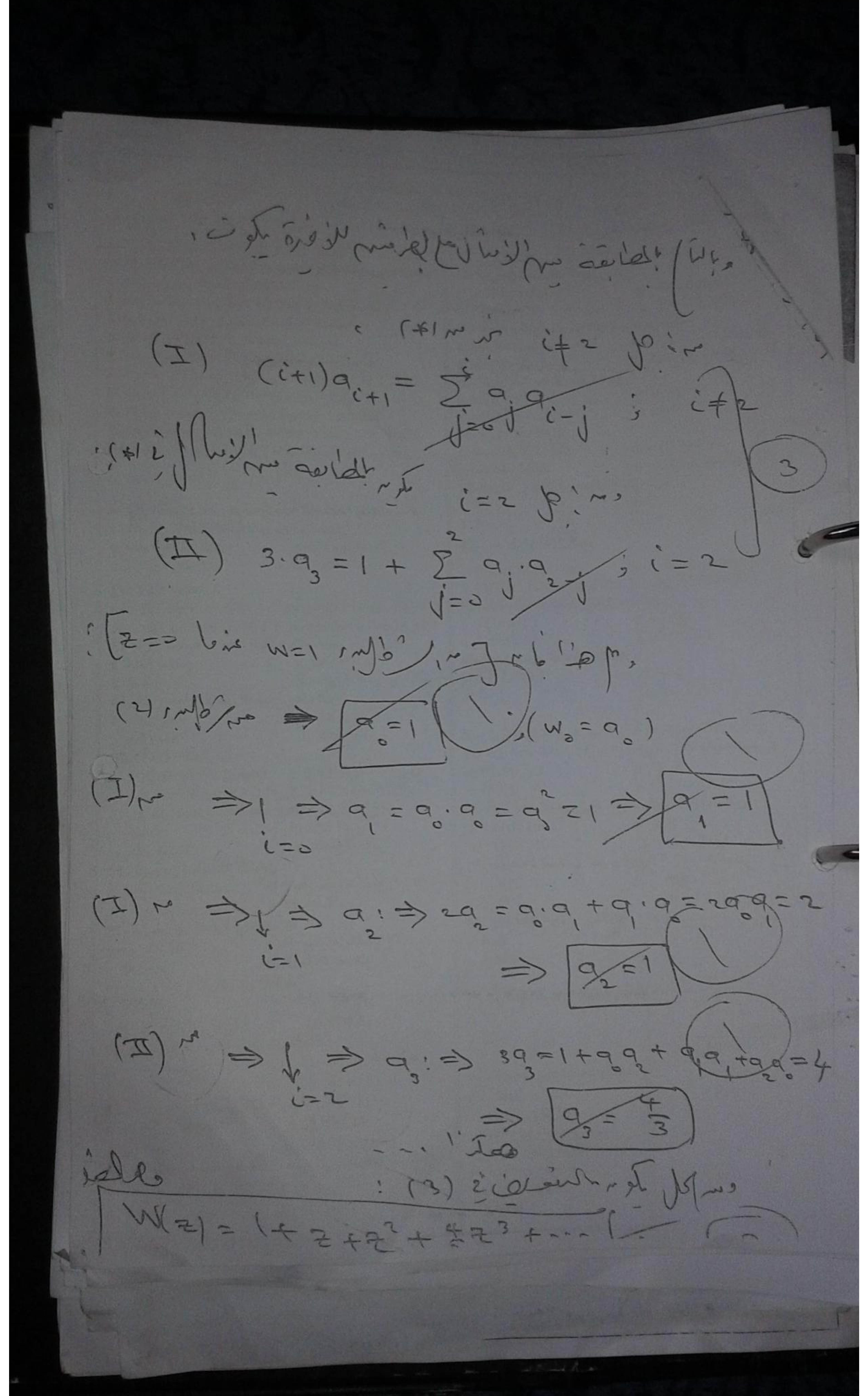
$$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0$$

ثم لكي نجعل الأس في المجموع الأول n نضع $n+2$ بدلاً من n وفي المجموع الثاني نضع $n-1$ بدلاً من n

للتجانس نكتب : (بعد إخراج الحد الأول من المجموع الأول)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1} a_{n-1} z^n = 0 \Rightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} \right] z^n = 0$$



وبالتالي بالمطابقة بين الأمثال المتشابهة للأسس يكون:

من أجل $i \neq 2$ نجد من (*1):

(I) $(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} \quad ; \quad i \neq 2$

بالمطابقة بين الأمثال في (*1):

ومن أجل $i=2$:

(II) $3 \cdot a_3 = 1 + \sum_{j=0}^{2} a_j \cdot a_{2-j} \quad ; \quad i = 2$

③

وهذا ما [من الشرط $w=1$ عندما $z=0$]:

من الشرط (2) $\Rightarrow$ $a_0 = 1$ ، $(w_0 = a_0)$

من (I) $\Rightarrow_{i=0}$ $\Rightarrow a_1 = a_0 \cdot a_0 = a_0^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

من (I) $\Rightarrow_{i=1}$ $\Rightarrow a_2 : \Rightarrow 2a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0 = 2a_0a_1 = 2$

$\Rightarrow a_2 = 1$

من (II) $\Rightarrow_{i=2}$ $\Rightarrow a_3 : \Rightarrow 3a_3 = 1 + a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 4$

$\Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$

وهكذا ....

ملاحظة: وبالحل يكون بالتعويض في (3):

$$W(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \cdots$$

تابع السؤال الثاني

فحص (تاريخ) 22-8-2013

(5)

وضح ((أ) (5)) من المعادلة المطلوب إذا علم

$$\left[e^{z^2} z^a (z+1)^b \right]_c = 0$$ (9)

وضح / أي حل العلاقة الموافقة

لوجود الحل أن المعادلة (3)

وكم الحساب الأصغر من المحور الحقيقي وأن المحور (4)

م = ٠ ، ب = ٠ وكم الحساب الأصغر للفترة (-1,0)

(2)

(١٥)

الاسم :	أسئلة مقرر نظرية المعادلات التفاضلية	جامعة البعث
الدرجة :	لطلاب السنة الرابعة – رياضيات	كلية العلوم
المدة :	دورة الامتحانات الاضافية (2013-2014)	قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول (20درجة): عين حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى التالية:

$$w' = z^2 + w^2 \quad \ldots\ldots *$$

الموافق للشرط الابتدائي :

$$\{ \; z = 0 \quad \text{عندما} \quad w = 1 \; \}$$

(بطريقة النشر بمتسلسلة قوى ونكتفي بحساب الثوابت الاختيارية حتى a_3) .

السؤال الثاني (30درجة) : لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

$$w'' - zw = o \quad \ldots (1)$$

مع شروط البدء :

$$[\; w(o) = 1 \quad , \quad w'(o) = o \;] \ldots\ldots (2)$$

والمطلوب أوجد الحل العام بطريقة سلاسل النشر في جوار النقطة العادية $z = o$ ، ثم أحسب الحل الخاص الموافق للشروط الابتدائية المعطاة في (2) . ! [ملاحظة: بحساب الثوابت حتى a_6 في الحل]

السؤال الثالث (25درجة) : لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$z\,w'' + (a+b+z)\,w' + a\,w = o \quad \ldots\ldots (1)$$

وحيث $a , b \in R$

. ولنفرض أن العلاقة التكاملية :

$$w = \int e^{z\xi}\, p(\xi)\, d\xi \quad \ldots\ldots (2)$$

هي حل للمعادلة التفاضلية المعطاة (1)،

عين هذا الحل [بتعيين $p(\xi)$ له] والشرط الموافق لوجود هذا الحل و مبيناً اختيار الطريق C اذا كان $a \rangle o$ و $b \rangle o$!

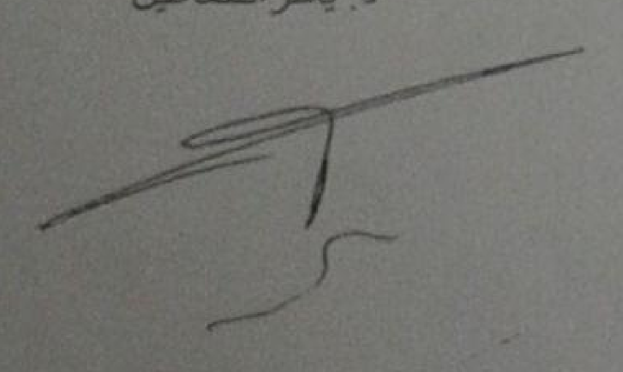
السؤال الرابع (25درجة) : لتكن لدينا المسألة الحدية :

$$y'' - y = f(x) \quad \ldots\ldots (1)$$

وحيث $y(x)$ محدود من أجل $x \in (-\infty, +\infty)$

المطلوب : استخرج دالة غرين لهذه المسألة الحدية ثم اكتب صيغة الحل المعبرة للمسألة بدلالته !

حمص في 2014-8-17 انتهت الأسئلة مع التوفيق والنجاح للجميع ! د. ياسر السماعيل



(1)

سلم تصحيح أسئلة مقرر -

نظرية المعادلات التفاضلية / تحليل المعادلات :

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - 2013-2014 -

الدورة الامتحانية الإضافية (17.8.2014)

عدد الأوراق (7)!

د. [illegible]

جواب السؤال الأول: لنوجد حل المعادلة:

$$W' = z^2 + w^2 \quad \text{---(1)}$$

20

الشرط الابتدائي: $(w=1 \text{ عندما } z=0)$ ---(2)

حيث نفرض أن الحل يعطى بسلسلة من الشكل:

$$\left[W = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right] \text{---(3)}$$

(2)

نشتق طرفي هذه العلاقة (3) بالنسبة لـ z مرة واحدة

ونعوض في المعادلة المعطاة (1) فنجد:

(3) => (بالنسبة لـ z)

$$W' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$$

(2)

نعوض في المعادلة المعطاة (1) فنجد:

(2)

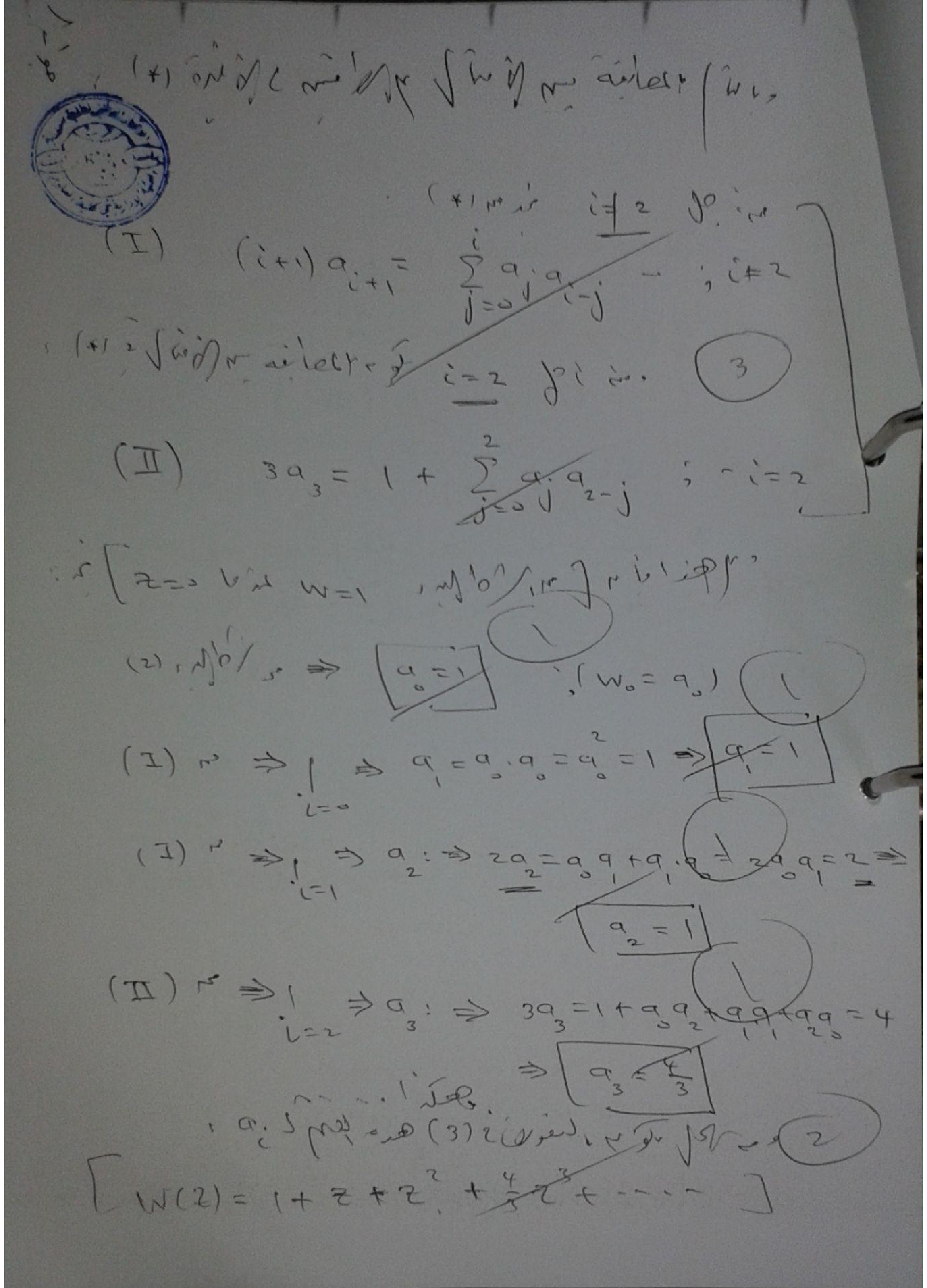
$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right)^2 \text{---(4)}$$

(1)

نعوض الآن هنا كل i بـ $i+1$ في الطرف الأيسر للتجانس في الأدلة فنجد:

(4)

$$(4) \Rightarrow \left[\sum^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i = z^2 + \sum^{\infty} z^i \sum^{i} a_j a_{i-j} \right] \text{---(*)}$$



ب) بالمقارنة بين الأمثال من العلاقتين (١) ، (*)

من أجل $i \neq 2$ نجد من (١) ، (*) :

(I) $$(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^{i} a_j a_{i-j} \quad ; \ i \neq 2$$

من أجل $i = 2$ نجد بالمقارنة بين الأمثال في (١) ، (*) :

3

(II) $$3a_3 = 1 + \sum_{j=0}^{2} a_j a_{2-j} \quad ; \ i = 2$$

من الشرط الابتدائي $w=1$ عندما $z=0$:

1

من الشرط الابتدائي (2) $\Rightarrow$ $a_0 = 1$; $(w_0 = a_0)$

1

من (I) $\Rightarrow$ $i=0$ $\Rightarrow$ $a_1 = a_0 \cdot a_0 = a_0^2 = 1 \Rightarrow$ $a_1 = 1$

1

من (I) $\Rightarrow$ $i=1$ $\Rightarrow a_2 : \Rightarrow 2a_2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2a_0 a_1 = 2 \Rightarrow$

$a_2 = 1$

1

من (II) $\Rightarrow$ $i=2$ $\Rightarrow a_3 : \Rightarrow 3a_3 = 1 + a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 4$

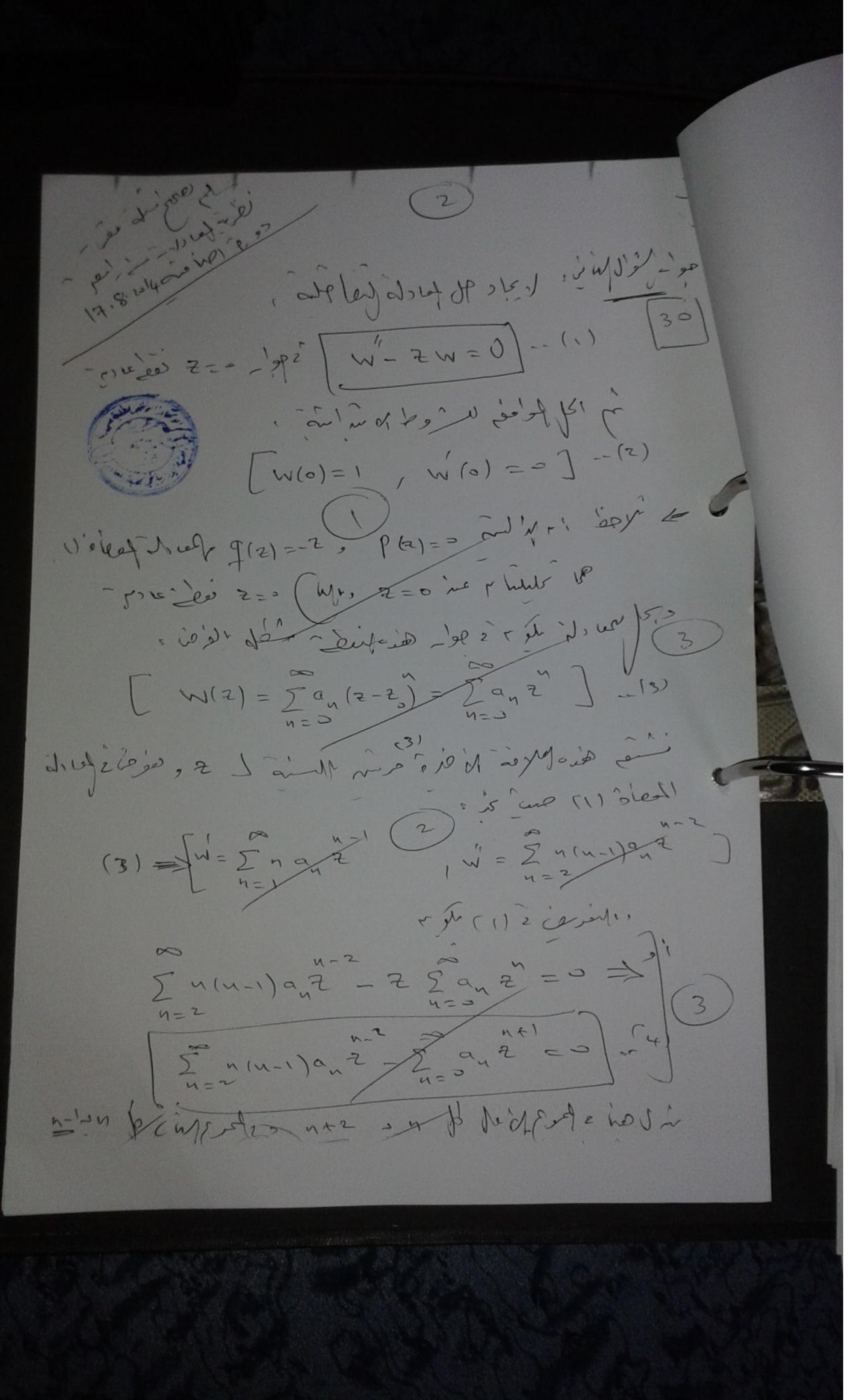
$\Rightarrow$ $a_3 = \frac{4}{3}$

وهكذا ......

2

ومن أجل ... (3) ... a_i :

$$W(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \cdots$$



2

جواب السؤال الثاني: لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية:

$$w'' - zw = 0 \quad \ldots(1)$$

حول $z=0$ نقطة عادية

ثم الحل الموافق للشروط الابتدائية:

$$[\, w(0)=1 \;,\; w'(0)=0 \,] \quad \ldots(2)$$

نلاحظ أن $P(z)=0$ و $q(z)=-z$ والمعادلة (1) هي تحليلية عند $z=0$ ولذا $z=0$ نقطة عادية

وعليه فإن الحل للمعادلة حول هذه النقطة يأخذ الشكل:

$$\left[\, w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,\right] \quad \ldots(3)$$

نشتق هذه العلاقة (3) مرتين بالنسبة لـ z ونعوض في المعادلة التفاضلية (1) حيث نجد:

$$(3) \Rightarrow \left[\, w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \;,\; w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \,\right]$$

بالتعويض في (1) نجد:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0 \quad \ldots(4)$$

نلاحظ هنا أن المجموع الأول لكل n نستبدل n+2 بـ n-1 ...

30

3

3

1

2

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}z^n = 0$$

(3)

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]z^n = 0$$

(5)

$$2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$ (2)

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}}, \forall n \geq 1$$ (3)

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3\times 2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4\times 3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{5\times 4} = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_0}{2\times 3\times 5\times 6}, \ldots$$

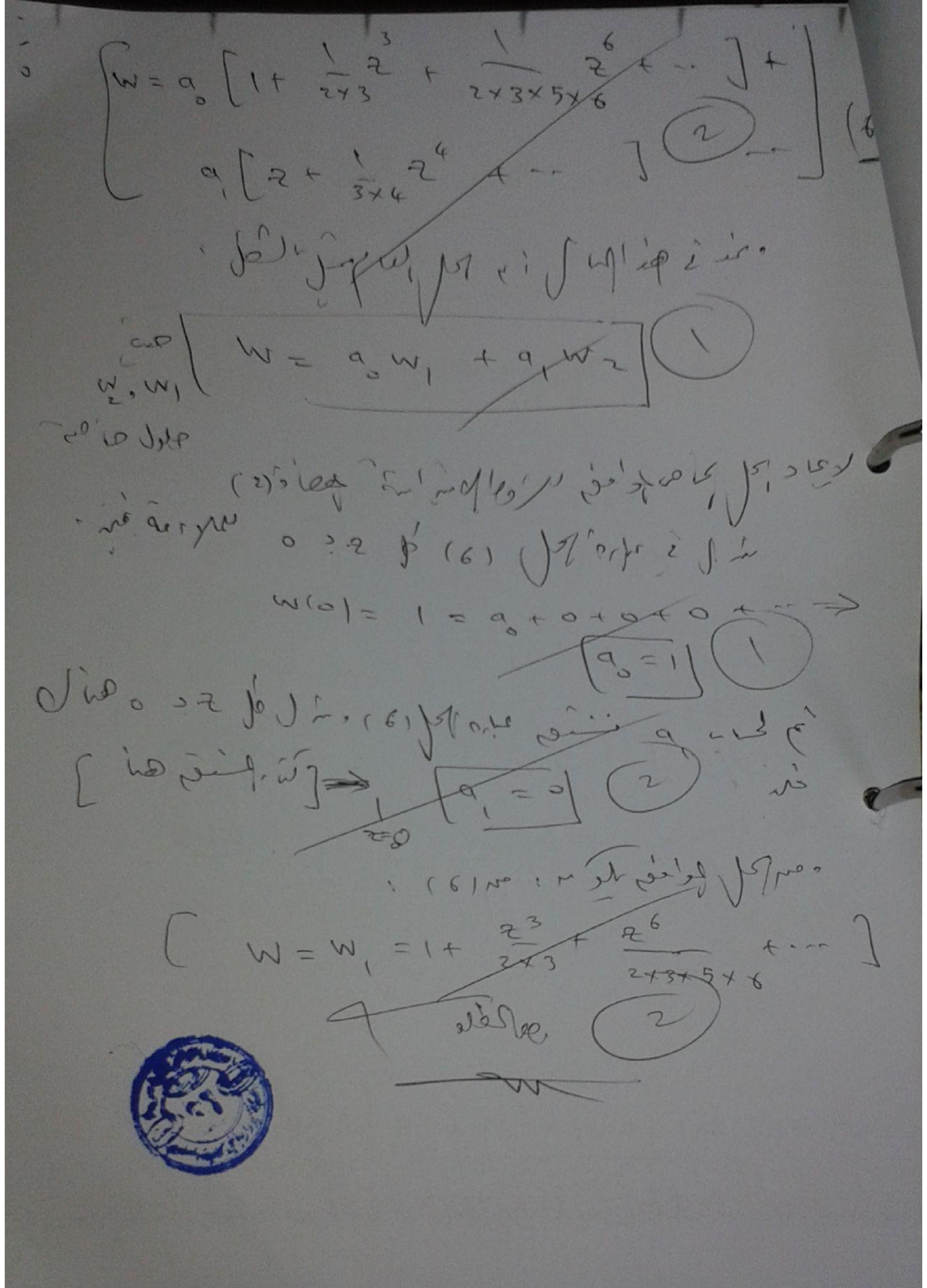
وهكذا - - -

(4)

$(n = 0, 1, \ldots)$ a_n

a_1 , a_0

17.8.2014



$$W = a_0\left[1 + \frac{1}{2\times3}z^3 + \frac{1}{2\times3\times5\times6}z^6 + \dots\right] + a_1\left[z + \frac{1}{3\times4}z^4 + \dots\right] \quad (2)$$

ومن هذا الحل نحصل على الحل :

$$W = a_0 W_1 + a_1 W_2 \quad (1)$$

حيث W_2 , W_1 حلول مستقلة

لإيجاد الحل الخاص نطبق الشروط الابتدائية في المعادلة (2)

نعوض بالشرط الأول في (6) عند $z = 0$

$$w(0) = 1 = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow \boxed{a_0 = 1} \quad (1)$$

لإيجاد a_1 نشتق معادلة الحل (6) ثم نعوض عن $z = 0$ هنا [w' المشتق هنا] $\Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \quad (2)$

ومن الحل الواقعي بالتعويض في (6) :

$$W = W_1 = 1 + \frac{z^3}{2\times3} + \frac{z^6}{2\times3\times5\times6} + \dots \quad (2)$$

مع التحية

4

جواب السؤال الثالث، لإيجاد حل المعادلة التفاضلية: 25

$$zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

نفرض حل هذه المعادلة على الشكل:

$$w = \int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta \quad \text{--- (2)}$$

لإيجاد الدالة $p(\zeta)$ والمنحني C كما يلي:

أولاً: نشتق العلاقة المفروضة مرتين (2) بالنسبة لـ z فنجد:

من (2) بالاشتقاق بالنسبة لـ z ⟹

$$w' = \int_C \zeta e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta$$

$$w'' = \int_C \zeta^2 e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta$$

نعوض بالتعويض في المعادلة (1):

$$(1) \Rightarrow z\int_C \zeta^2 e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta + (a+b+z)\int_C \zeta e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta + a\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\, d\zeta = 0$$

أو:

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\left[z\zeta^2 + a\zeta + b\zeta + z\zeta + a\right] d\zeta = 0 \Rightarrow$$

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\left[z\,Q(\zeta) + R(\zeta)\right] d\zeta = 0 \quad \text{--- (3)}$$

[illegible] 17.8.2014

(5)

حسب ما لدينا هنا

(2)

$$\left[\; Q(q) = q^2 + q \;, \quad R(q) = (a+b)q + a \;\right]$$

نلاحظ أن العامل في المعادلة (٣) مشتقاً تاماً :

$$\frac{d}{dq}\left[e^{zq} s(q) \right]$$

(3) شروط

إذا كان

$$s(q) = (q^2 + q)\, p(q)$$

$$s'(q) = \left[(a+b)q + a \right] p(q)$$

ومن هذا ينتج

$$\frac{s'(q)}{s(q)} = \frac{(a+b)q + a}{q^2 + q} \Rightarrow$$

(2)

(هذه تنتج بعد توزيع الكسور)

$$\boxed{\frac{s'(q)}{s(q)} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q+1}} \quad \text{— (4)}$$

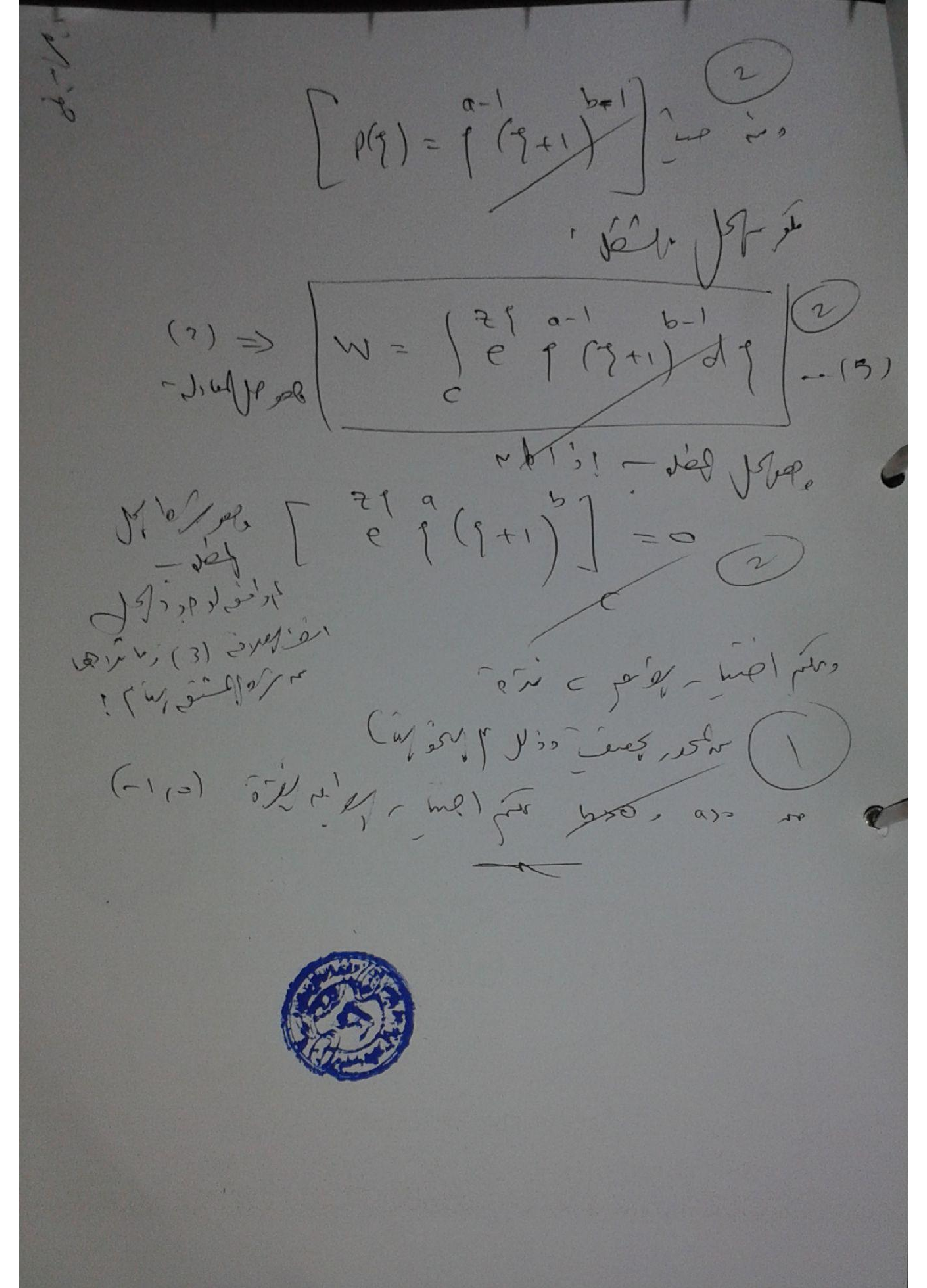
2/4 بعد توزيع الكسور في المعادلة ... من العامل ...

$$(4) \Rightarrow \ln s(q) = \ln q^a + \ln (q+1)^b \Rightarrow$$

[illegible]

$$\boxed{s(q) = q^a (q+1)^b} \quad (2)$$

$$p(q) = \frac{s(q)}{q^2 + q} = \frac{q^a (q+1)^b}{q(q+1)} \Rightarrow p(q) = q^{a-1}(q+1)^{b-1}$$



$p(\zeta) = \zeta^{a-1}(\zeta+1)^{b-1}$
$W = \int_C e^{z\zeta}\zeta^{a-1}(\zeta+1)^{b-1}\,d\zeta$ ...(3)
$\left[e^{z\zeta}\zeta^{a}(\zeta+1)^{b}\right]_C = 0$

(6)

17.8.2014

25

نستخرج دالة كرين ...

$$y'' - y = f(x) \quad \text{---} (1)$$

... $y(x)$ محدود عند $x \in (-\infty, +\infty)$!

الحل العام للمعادلة المتجانسة ... المعادلة (1)

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x} \quad \text{---} (2)$$

(3)

الحل الخاص (2)

$y_1 = e^{x}$ محدود عندما $x \to -\infty$

$y_2 = e^{-x}$ محدود عندما $x \to +\infty$

... دالة كرين ... (1)

$$G = \begin{cases} \varphi(s)\, y_1(x) & , -\infty \le x \le s \\ \psi(s)\, y_2(x) & , s < x \le +\infty \end{cases}$$

(4)

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\, e^{x} & , -\infty \le x \le s \\ \psi(s)\, e^{-x} & ; s \le x \le +\infty \end{cases} \quad \text{---} (3)$$

... $\varphi(s)$, $\psi(s)$ ...

(7)

17.8.2014

(2)

$$\psi(s)\, y_2(s) = \varphi(s)\, y_1(s)$$

$$\psi(s)\, y_2'(s) - \varphi(s)\, y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$$

$$\Downarrow$$

(2)

$$\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^{s}$$

$$-\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^{s} + 1$$

$\Rightarrow$ بالحل

(4)

$$\left[\varphi(s) = -\frac{1}{2} e^{-s} \quad , \quad \psi(s) = -\frac{1}{2} e^{s}\right]$$

ومنه دالة جرين تعطى بـ :

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s} & , -\infty \le x \le s \\ -\frac{1}{2} e^{s-x} & , s \le x \le +\infty \end{cases}$$

(4)

ومنه حل المسألة المعطاة بدلالة دالة جرين :

$$y(x) = \int_a^b G(s,x) f(s)\, ds \quad , \quad a, b \in (-\infty, +\infty)$$

(3)

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s,x) f(s)\, ds =$$

$$\int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{2} e^{x-s} f(s)\, ds + \int_{x}^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{s-x} f(s)\, ds .$$

أسئلة مقرر نظرية المعادلات التفاضلية
لطلاب السنة الرابعة - رياضيات
لدورة امتحانات الفصل الدراسي الثاني(2013/2014)

الاسم:
الدرجة:
المدة:

...معة البعث
...ة العلوم
... الرياضيات

... عن الأسئلة التالية:

...ل الأول: (20درجة) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى :

$$\frac{dw}{dz}=f(z,w(z)) \quad ....(1)$$

وبفرض ان الدالة $f(z,w)$ تحليلية في منطقة D وأنها دالة محدودة $|f|\le M$ في z

وأنها تحقق في D شرط ليبشيتز بالنسبة إلى المتحول w وبفرض أن :

$$[w=w_0 \quad for \quad z=z_0 \;]........(2)$$

المطلوب : برهن أن الحل الذي يحقق المعادلة(1)ويحقق الشرط الإبتدائي (2) هو وحيد !

...ثاني :(30درجة) أوجد الحل العام في جوار الصفر z=0 (نقطة عادية) للمعادلة التفاضلية التالية :

$$w''+zw'-w=0 \quad ....(1)$$

ثم أوجد الحل الموافق للشرط الإبتدائي :

$$! \quad w(0)=0,\; w'(0)=1 \quad ....(2)$$

...ث:(30 درجة) أوجد الحل العام في جوار اللانهاية $z=\infty$ للمعادلة التفاضلية :

$$z^2w''+2z^3w'+w=0 \quad ....(1)$$

... (20درجة) أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y''-y=0 \quad ....(1)$$

الذي يحقق الشرط الحدي :

$$[y(0)=3 \quad , \quad y(1)=y'(1)=1] \quad ...(2)$$

(23.6.2014 انتهت الأسئلة مع تمام التوفيق والنجاح! مدرس المقرر: د.ياسر السما...